Міністерство освіти і науки України
Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. Академіка С. Дем'янчука

Р.М.Літнарович
Побудова і дослідження математичної моделі залежності між ростом і вагою дітей методом статистичних випробувань Монте Карло
Істинна модель

Апроксимація поліномом першого степеня

Рівне, 2009

Літнарович Р.М. Побудова і дослідження математичної моделі залежності між ростом і вагою дітей методом статистичних випробувань МонтеКарло. Істинна модель. Апроксимація поліномом першого степеня. МЕГУ, Рівне, 2009, -32 с.

Рецензенти: С.В. Лісова, доктор педагогічних наук, професор
В.О.Боровий, доктор технічних наук, професор
В.Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й.В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор.

Дослідження проведені в рамках роботи наукової школи МЕГУ

На основі результатів дослідження 200 дітей дитячого садика побудована математична модель залежності між ростом і їх вагою у вигляді поліному першого степеня по способу найменших квадратів.

Дана математична модель приймається як істинна, що дає можливість провести широкомасштабні дослідження точності вивчаємих залежностей методом статистичних випробувань Монте Карло шляхом генерування псевдовипадкових чисел, які приводяться до заданих нормованих, побудови спотворених моделей, їх зрівноваження по способу найменших квадратів і набору великої статистики. Знаходяться ймовірніші значення коефіцієнтів «а», «в», поліному першого степеня апроксимуючої математичної моделі.

Робиться оцінка точності і даються узагальнюючі висновки.

Для студентів і аспірантів педагогічних вузів

© Літнарович Р.М.

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Зміст

Передмова

За результатами дослідження 200 дітей дитячого садика будується математична модель залежності між їх ростом і вагою у вигляді поліному першого степеня.

Вихідними даними для проведення досліджень в даній роботі беруться результати росту дітей (X_i) і їх вага ($У_i$).

Розраховується коефіцієнт детермінації , на основі якого автор робить висновок про можливість встановлення емпіричної залежності у вигляді математичної формули.

За цими даними будується математична модель по способу найменших квадратів. Дана модель приймається за істинну модель.

В подальшому молодими вченими будуть генеруватись випадкові числа, знаходитись коефіцієнт пропорційності К і дані випадкові числа приводитимуться до середньої квадратичної похибки 0,1 .

Будуватимуться спотворені моделі, яка зрівноважуватимуться по способу найменших квадратів.

Дається оцінка точності елементів, зрівноважених процедурою способу найменших квадратів. Робляться узагальнюючі висновки.

Хоча експериментальні дані нами взяті із літературних джерел, але математична модель залежності росту і ваги дітей будується вперше і, як нам представляється, вперше буде застосовано метод Монте Карло для дослід-ження цієї залежності.

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

1. Постановка проблеми дослідження

При великому об'ємі вибірки, тобто коли число досліджуваних пар Х і У велике, а самі значення, також, великі числа, раціонально використати спосіб згрупованих даних.

Необхідно побудувати математичну модель залежності між ростом і вагою 200 дітей (Дитсадок № 26 м. Костроми) [1,с.104].

Таблиця 1. Залежність між ростом і вагою дітей

Ріст,см(Х)	Вага в кг (У)										
	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
85-90	2	3									
90-95		2	5								
95-100		1	14	7							
100-105			2	9	4	1					
105-110				10	12	4	2				
110-115				2	10	8	4				
115-120					3	17	14	3	3		
120-125					1	8	11	12	5	5	
125-130							5	3	2	2	2
130-135										1	1

Приведені дані в табл.1 складаються слідуючим чином:

1. Початкові дані за ознаками Х (ріст в см.) і У (вага в кг) розбиваються на рівні інтервали. Наприклад, по Х : (85-90); (90-95)…При цьому ΔX= 5 см- ширина кожного інтервалу. Аналогічно по У : (10-12); (12-14)…При цьому $\Delta У$= 2 кг. Кількість інтервалів звичайно беруть від 8 до 12.

2. Отримані із експерименту значення ознак Х і У зводять в таблицю, знаходячи інтервал, в який попадає значення ознаки Х, і інтервал, в який попадає відповідне значення ознаки У. В клітинці на перетині стрічки і стовпчика цих інтервалів прставляють точку (або інший знак).Наприклад6 ріст – 97 см, вага -17,1 кг. В даному випадку 97 попадає в інтервал 95-100, а 17,1попадає в інтервал 16-18. На перетині строчки 95-100 і стовпчика 16-18 відмічаємо точку.При цьому необхідно слідкувати, щоб кожне значення Х або У із початкових даних попадало лише тільки в один інтервал. Наприклад, візьмемо інтервали по Х: 95-100 і 100- 105, а значення Х= 100 (Х=100 співпадає з крайнім із значень обох інтервалів). Виникає питання : в який із інтервалів віднести значення Х=100? До складання таблиці необхідно умовитися: значення Х (або У) , яке співпадає з одним із кінців інтервалу , відносити в перший із слідуючих по порядку інтервалів.Тоді значення Х=100 попадає в інтервал (95-100).

3. Підраховують, скільки точок попадає в кожну із клітинок таблиці, отримують частоти і записують їх числами в цих же клітинках. Так, на пере – тині строчки (95-100) і стовпця (16-18) стоїть число 7. Це значить, що у 7 дітей ріст від 95 до 100 см, а їх вага в межах 16-18 кг.

2. Встановлення коефіцієнта кореляції

По встановленому коефіцієнту кореляції появляється можливість оцінити результати експерименту, тобто зробити оцінку тісноти зв'язку між досліджуваними факторами.

Спочатку розраховується коефіцієнт детермінації R^2

$$R^2 = \frac{\left([XY]-\frac{1}{n}[X]\cdot[Y]\right)^2}{\left([X^2]-\frac{1}{n}[X]\cdot[X]\right)\cdot\left([Y]^2-\frac{1}{n}[Y]\cdot[Y]\right)}, \qquad \textbf{(2.1)}$$

де знаком [ ] позначено суму відповідних елементів по Гаусу.

Для парної лінійної регресії коефіцієнт детермінації дорівнює квадрату коефіцієнта кореляції.

Позначимо

$$\begin{aligned} A&=[xy]-1/n([x][y]),\\ B&=[X^2]-1/n([x]^2),\\ C&=[У^2]-1/n([У]^2). \end{aligned} \qquad \textbf{(2.2)}$$

Тоді

$$R^2 = \frac{A^2}{BC}, \qquad (2.3)$$

або

$$R = \frac{A}{\sqrt{BC}}, \qquad (2.4)$$

Представимо табл.1 у вигляді серединних значень (центру) інтервалу.

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com
ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Таблиця 2. Залежність між ростом і вагою дітей відносно центру інтервалу

Ріст,см ($\bar{x}$)	Вага в кг ($\bar{y}$) і частота υ_i										
	11	13	15	17	19	21	23	25	27	30	32
87,5	2	3									
92,5		2	5								
97,5		1	14	7							
102,5			2	9	4	1					
107,5				10	12	4	2				
112,5				2	10	8	4				
117,5					3	17	14	3	3		
122,5					1	8	11	12	5	5	
127,5							5	3	2	2	2
132,5										1	1

Підрахуємо середні значення ваги $\bar{y}$ за формулою

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{x}\upsilon_i}{\sum \upsilon_i}, \qquad (2.5)$$

де частоти υ_i вибираються із табл.2 построчно.

Так, в нашому випадку отримаємо:

$$\bar{y}_1 = \frac{11 \cdot 2 + 13 \cdot 3}{2+3} = 12{,}2\ кг,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{13 \cdot 2 + 15 \cdot 5}{2+5} = 14{,}428\ кг,$$

$$\bar{y}_3 = \frac{13 \cdot 1 + 15 \cdot 14 + 17 \cdot 7}{1+14+7} = 15{,}545 кг,$$

$$\bar{y}_4 = \frac{15 \cdot 2 + 17 \cdot 9 + 19 \cdot 4 + 21 \cdot 1}{2+9+4+1} = 17{,}50\ кг,$$

$$\bar{y}_5 = \frac{17 \cdot 10 + 19 \cdot 12 + 21 \cdot 4 + 23 \cdot 2}{10+12+4+2} = 18{,}857\ кг,$$

$$\bar{y}_6 = \frac{17 \cdot 2 + 19 \cdot 10 + 21 \cdot 8 + 23 \cdot 4}{2+10+8+4} = 20{,}167\ кг,$$

$$\bar{y}_7 = \frac{19 \cdot 3 + 21 \cdot 17 + 23 \cdot 14 + 25 \cdot 3 + 27 \cdot 3}{3+17+14+3+3} = 22{,}300\ кг,$$

$$\bar{y}_8 = \frac{19 \cdot 1 + 21 \cdot 8 + 23 \cdot 11 + 25 \cdot 12 + 27 \cdot 5 + 29 \cdot 5}{1+8+11+12+5+5} = 24{,}286\ кг,$$

$$\bar{y}_9 = \frac{23 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 27 \cdot 2 + 29 \cdot 2 + 31 \cdot 2}{5+3+2+2+2} = 26{,}000\ кг,$$

$$\bar{y}_{10} = \frac{29 \cdot 1 + 31 \cdot 1}{1+1} = 30{,}000\ кг.$$

На основі даних розрахунків отримуємо табл..3.

Таблиця 3.Вихідні дані для побудови зрівноваженої моделі

№п/п	Ріст,см ($\bar{x}$)	Вага в кг ($\bar{y}$)
1	87,5	12,200
2	92,5	14,428
3	97,5	15,545
4	102,5	17,500
5	107,5	18,857
6	112,5	20,167
7	117,5	22,300
8	122,5	24,286
9	127,5	26,000
10	132,5	30,000
Σ =	1100	201,283

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

3. Представлення системи нормальних рівнянь

У результаті проведеного експерименту ми маємо ряд результатів X_i, Y_i, функціональну залежність між якими будемо шукати за допомогою поліному степені К, де коефіцієнти a_i являються невідомими.

Тоді, система нормальних рівнянь буде

$$
\begin{aligned}
&na_0 + a_3[x] + a_2[x^2] + \ldots + a_m[x^m] - [y] = 0,\\
&a_0[x] + a_3[x^2] + a_2[x^3] + \ldots + a_m[x^{m+1}] - [xy] = 0,\\
&a_0[x^2] + a_1[x^3] + a_2[x^4] + \ldots + a_m[x^{m+1}] - [x^2 y] = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0[x^m] + a_1[x^{m+1}] + a_2[x^{m+2}] + \ldots + a_m[x^{2m}] - [x^m y] = 0,
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

де знаком [ ] позначена сума відповідного елемента.
Для поліному першого степеня виду

$$y = a + вx \qquad (3.2)$$

Система нормальних рівнянь буде

$$
\begin{aligned}
&в[x^2] + a[x] - [yx] = 0,\\
&в[x] + na - [y] = 0,
\end{aligned}
\qquad (3.3)
$$

В подальшому будемо рішати систему лінійних нормальних рівнянь (3.3) одним із відомих в математиці способів.

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

4. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Приведемо розрахункову таблицю, на основі якої отримують коефіцієнти нормальних рівнянь.

Таблиця 4. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь.

№	Ріст,см ($\bar{x}$)	Вага в кг ($\bar{y}$)	x^0	x^2	xy	y^2
1	87,5	12,200	1	7656,25	1068	148,840
2	92,5	14,428	1	8556,25	1335	208,167
3	97,5	15,545	1	9506,25	1516	241,65
4	102,5	17,500	1	10506,25	1794	306,25
5	107,5	18,857	1	11556,25	2027	355,59
6	112,5	20,167	1	12656,25	2269	406,71
7	117,5	22,300	1	13806,25	2620	497,3
8	122,5	24,286	1	15006,25	2975	589,8
9	127,5	26,000	1	16256,25	3315	676,00
10	132,5	30,000	1	17556,25	3975	900,00
Σ	1100	201,283	10	123062,50	22893	4330,3

Таким чином, на основі проведених розрахунків нами отримана наступна система нормальних рівнянь

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

$$b[X^2] + a[X] - [YX] = 0, \qquad (4.1)$$

$$b[X] + na - [Y] = 0.$$

$$123062{,}50b + 1100a - 22893 = 0, \qquad (4.1')$$
$$1100b + 10.0a - 201{,}283 = 0.$$

5. **Рішення системи лінійних рівнянь способом Крамера**

Нехай, маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_{1n} &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Для того, щоб із цієї системи визначити невідомі c, складемо із коефіцієнтів при невідомих визначних Δ, який називається визначником системи рівнянь (5.1).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \ldots a_{n1} & \ldots a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5.2)$$

Помножимо ліву і праву частини рівності (5.2) на x_i. В лівій частині будемо мати Δx_i, в правій же частині введемо у всі члени i-го стовпчика визначника a_K і множник x_i

$$\Delta \cdot x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1i}x_i \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2i}x_i \ldots a_{2n} \\ \ldots a_{n1} & \ldots a_{n2} & \ldots a_{ni}x_i \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5.3)$$

Потім до i-го стовпчика визначника (5.3) додамо всі інші стовпчики, помножені відповідно на $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Величина визначника від цього не

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

зміниться. Тоді i-стовпчик представить собою ліву частину системи рівнянь (5.1).

Замінимо його вільними членами цієї системи і позначимо через Δ_i

$$\Delta \cdot x_i = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots b_1 \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots b_2 \ldots a_{2n} \\ \ldots a_{n1} & \ldots a_{n2} & \ldots b_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5.4)$$

Звідки, $$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots b_1 \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots b_2 \ldots a_{2n} \\ \ldots a_{n1} & \ldots a_{n2} & \ldots b_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots a_{n1} & \ldots a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}. \qquad (5.5)$$

Формула (5.5) дає можливість визначити кожне невідоме системи лінійних рівнянь (5.1).

Якщо вільні члени системи лінійних рівнянь рівні нулю, то вона буде системою лінійних однорідних рівнянь.

Система лінійних однорідних рівнянь може мати рішення відмінне від нульового, якщо визначник системи Δ не рівний нулю.

Нехай, див.(2.2)

A=[xy]-1/n([x][y]),
B=[X^2]-1/n([x]^2),
C=[У^2]-1/n([У]^2).

І в нашому випадку

A=	[XY]-[X][Y]/n=	751,5475
B=	[X^2]-([x]^2)/n=	2062,500000
C=	[Y^2]-([Y]^2)/n=	278,813734

При цьому коефіцієнт кореляції r

R= r = A/√(BC).

І в нашому випадку

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$R = 751.5475 / \sqrt{2062.5 \cdot 278.8137} = 0,991$$

що говорить про надто високий зв'язок між факторною Х і результуючою ознакою У. А це дає нам підстави вивести емпіри-
чну формулу математичної моделі залежності між ростом і вагою дітей.

Таким чином, невідомий коефіцієнт b буде

b= A/B . (5.6)

І в нашому випадку

b= 751,5475/ 2062,50= 0,364387.

Коефіцієнт а знайдемо за формулою

a= 1/n([У] – b[X]). (5.7)

При цьому

a = 1/10(**!Формула не в таблице –** 0,364387***!Формула не в таблице**)
= -19,954233
.

тобто математична модель, розроблена в даній монографії, буде

$$y' = -19,954233 + 0,364387x. \quad (5.8)$$

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

6. Контроль зрівноваження

Контроль зрівноваження виконується за формулою

$[У^2]$ – b[УХ] – a[У] = [εε] (6.1)

І в нашому випадку

4330,298 - 0,364387*22892,678 – (-19,954233)* **!Формула не в таблице= 4,95162,**

а з другої сторони

[εε] = 4,95985

,

що говорить про коректність виконаної процедури строгого зрівноваження за способом найменших квадратів.

7. Оцінка точності параметрів, отриманих із рішення системи нормальних рівнянь

Середня квадратична похибка одиниці ваги розраховується за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-K}} \quad (7.1)$$

У формулі (7.1) n - число початкових рівнянь, K - число невідомих. В нашому випадку $n = 10; K = 2.$ ε- різниця між вирахуваним значенням y' і вихідним значенням y_i

$$\varepsilon_i = y_i' - y_i \quad (7.2)$$

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Підставляючи у виведену нами, формулу (5.8) значення X спотвореної моделі отримаємо розрахункові значення y', які будуть дещо відрізнятися від вихідних значень Y.

Середня квадратична похибка одиниці ваги за результатами наших досліджень

$$\mu = \sqrt{4{,}960/8} = 0{,}787.$$

Середня квадратична похибка коефіцієнта b

$$m_b = \mu\sqrt{1/B}\ , \qquad (7.3)$$

де вага P коефіцієнта b розраховується за фомулою

$$P_b = (n[X^2] - [X][X]/n),$$

тобто

$$P_b = B. \qquad (7.4)$$

І в нашому випадку

$$m_b = 0{,}787\sqrt{1/2062{,}5} = 0{,}0173.$$

Середня квадратична похибка коефіцієнта a

$$m_a = \mu\sqrt{[X^2]/B*n}, \qquad (7.5)$$

де вага P коефіцієнта a розраховується за формулою

$$P_a = (n[X^2] - [X][X])/[X^2]), \qquad (7.6)$$

тобто

$$P_a = B*n/[X^2]. \qquad (7.7)$$

І в нашому випадку

$$m_a = 0{,}787\sqrt{1230262{,}50/2062{,}5*10} = 1{,}922.$$

Середню квадратичну похибку зрівноваженої функції У′ розраховують за формулою

$$m_{y'} = \sqrt{m_b^2(X_{сп.} - [X]/n)^2 + \mu^2/n)}. \qquad (7.8)$$

Таблиця 5. Порівняльний аналіз результатів строгого зрівноваження

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

№	Ріст,см ($\bar{x}$)	Вага в кг ($\bar{y}$)	$y'_{зрівноваж}$	$\varepsilon = y'_i - y_i$	ε^2
1	87,5	12,200	11,930	-0,2704	0,07312
2	92,5	14,428	13,752	-0,6765	0,45761
3	97,5	15,545	15,573	0,0285	0,00081
4	102,5	17,500	17,395	-0,1046	0,01094
5	107,5	18,857	19,217	0,3603	0,12984
6	112,5	20,167	21,039	0,8723	0,76085
7	117,5	22,300	22,861	0,5612	0,31495
8	122,5	24,286	24,683	0,3971	0,15771
9	127,5	26,000	26,505	0,5051	0,25509
10	132,5	30,000	28,327	-1,6730	2,79893
n=10	1100	201,283	201,283	0,0000	4,95985

Використовуючи функцію ЛИНЕЙН, за результатами комп'ютерного розрахунку, отримали повністю автентичні результати:

0,3643867	-19,9542	**У=bx+**	a
0,0173377	1,923335	**mb**	ma
0,982	0,787	r²	my
441,714	8,000	**Fстат.**	dfст.св.
273,854	4,959846	**Perp.сум.кв**	Зал.сум.кв.

Таким чином, рівняння регресії значимо на рівні α =0,05 тому що критерій F розподілу Фішера-Снедекора

$$F=441.714 > F_{\alpha,1,7}=5.59.$$

Враховуючи смисл S_R^2 і S^2, можна сказати, що значення F показує в якій мірі регресія краще оцінює значення залежної змінної У' в порівнянні із її середнім.

Значимість рівняння парної регресії для контролю може бути перевірена і другим способом, якщо оцінити значимість коефіцієнта регресії «в» (у=а+вх), який має t-розподіл Стьюдента з к = n – 2 степе-нями свободи.

Рівняння парної лінійної регресії або коефіцієнт регресії «в» значимі На рівні α (інакше – гіпотеза Но про рівність параметра β_1 нулю, тобто: Но :β_1 = 0, відкидається.), якщо фактично спостерігаєме значення ста-тистики

$$t = \frac{b_1 - 0}{S}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} \qquad (7.9)$$

більше критичного (по абсолютній величині), тобто

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$|t| > t_{1-\alpha;n-2}\,. \qquad (7.10)$$

Набираючи в MS Excel : «Сервис», «Анализ данных», «Парный двухвыборочный t – тест для средних», отримаємо

	Переменная 1	Переменная 2
Среднее	110	20,1283
Дисперсия	229,1666667	30,979304
Наблюдения	10	10
Корреляция Пирсона	0,991065537	
Гипотетическая разность средних	0	
df	9	
t-статистика	29,44865947	
P(T<=t) одностороннее	1,46523E-10	
t критическое одностороннее	1,833112923	
P(T<=t) двухстороннее	2,93047E-10	
t критическое двухстороннее	2,262157158	
	X	Y

Таким чином, дисперсія по X Dx = 229.167, а середня квадратична похибка $m_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{229.167} = 15.138.$

При цьому $\sqrt{\left[(x-\bar{x})^2\right]} = \sqrt{(n-1)} * 15{,}138 = 45{,}414,\ \partial e\ n = 10$

t – статистика для лінійної регресії буде

$$t = \frac{b}{\mu}\sqrt{\left[(x-\bar{x})^2\right]} = \frac{0.36439}{0.78739}\,45.414 = 21.0168.$$

Контролем має слугувати рівність

F = t ^{2}.

І дійсно, 21,0168 ^{2} =441,705 , а F = 441.714.

Таким чином,

t = 21.0168 > t $_{0.95;8}$ =2.31.

Надійні межі індексу кореляції визначаються через оцінки середньоквадратичного відхилення

$$m[R] = \frac{1-R}{\sqrt{n}}, \qquad (7.11)$$

$$\Delta R = +/- t_{\alpha} m[R]. \qquad (7.12)$$

І в нашому випадку

$$m[R] = \frac{1-0{,}991}{\sqrt{10}} = 0{,}003,$$

$$\Delta R = (+/-)2{,}31 * 0{,}003 = (+/-)0{,}007.$$

Для парної лінійної регресії Y'=a+bx коефіцієнт еластичності знаходиться за формулою

$$K_x = \frac{(a+bx)'\,x}{y'}, \qquad (7.13)$$

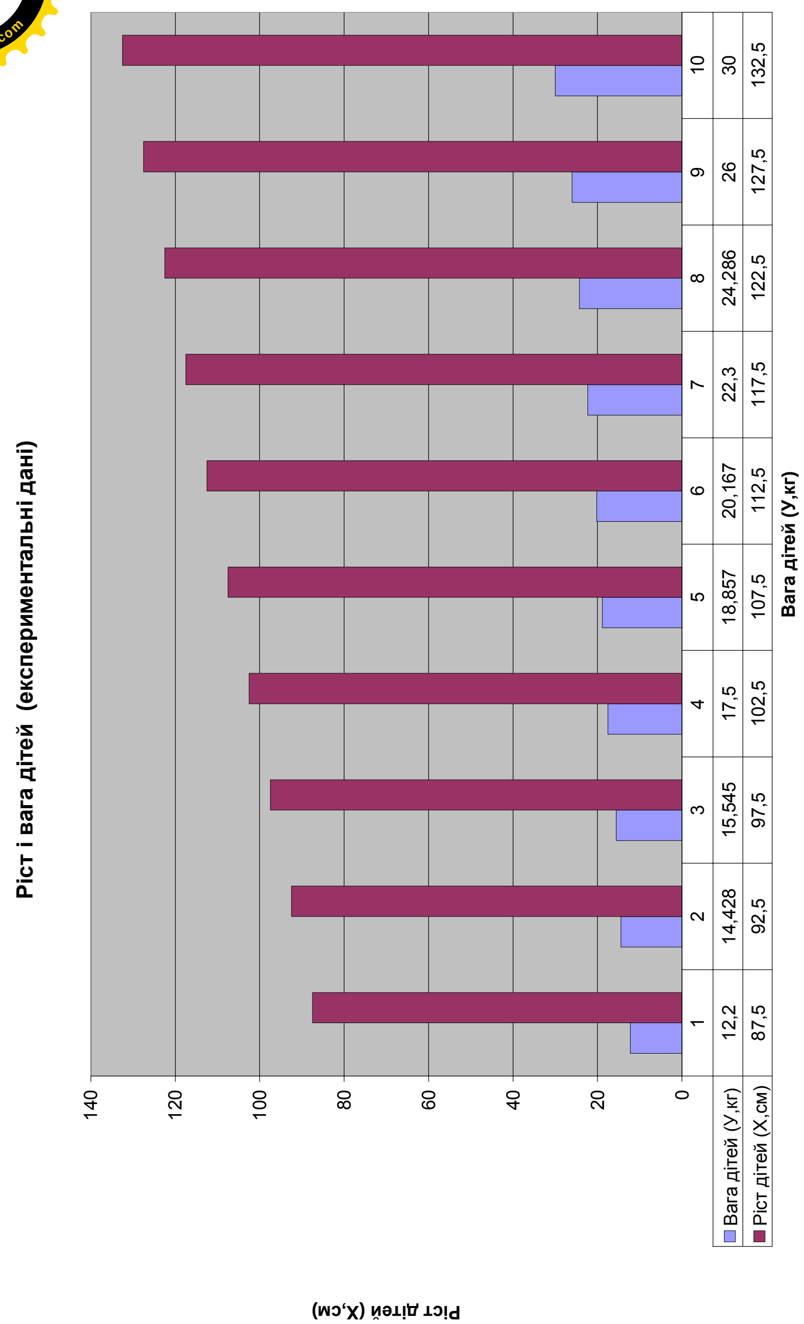
де штрихом у чисельнику позначена похідна, а в знаменнику –зрівноважене значення функції.

Або $$K_x = \frac{bx}{y'}. \qquad (7.14)$$

Так, наприклад, $K_{x5} = \dfrac{0{,}364387 \cdot 107{,}5}{19{,}217} = 2{,}038.$

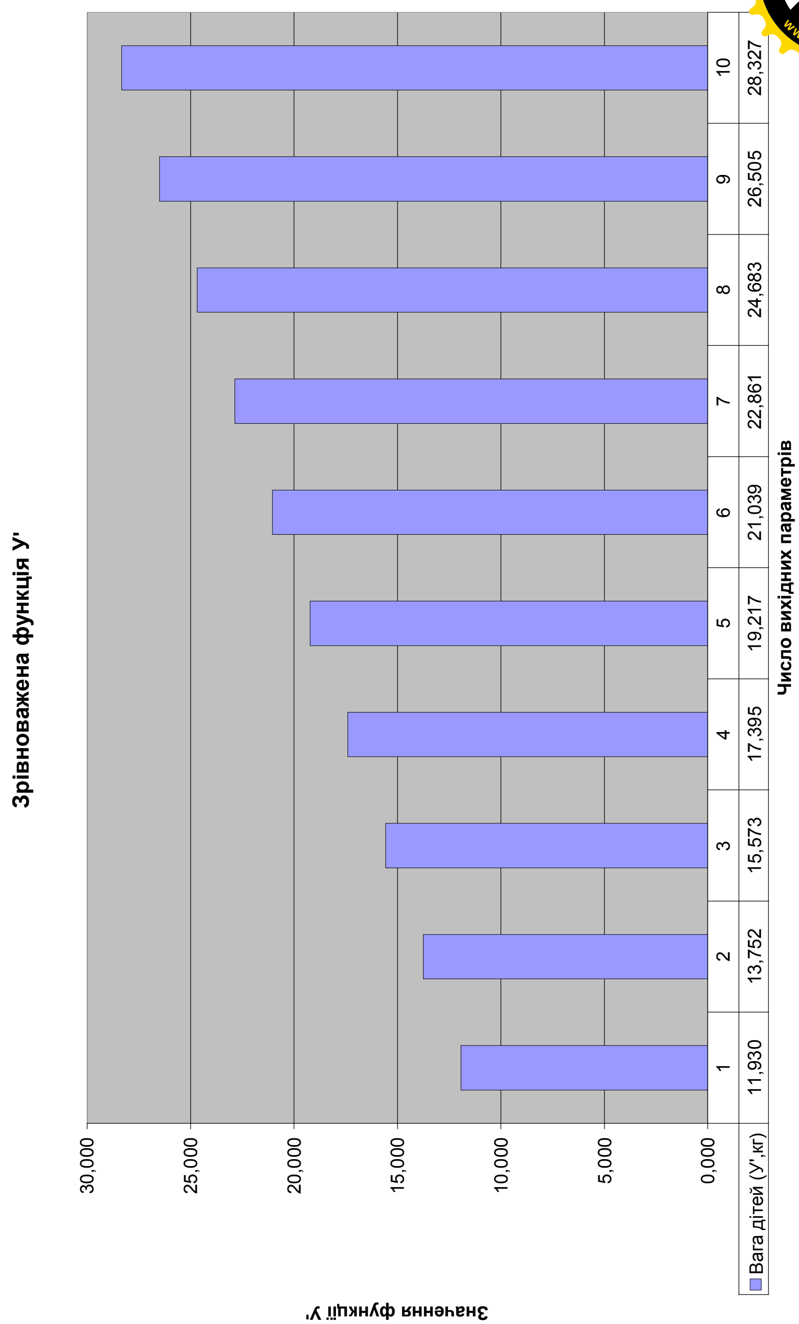
Коефіцієнт еластичності показує, на скільки відсотків зміниться показник «У», якщо фактор «Х» зміниться на один відсоток.

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

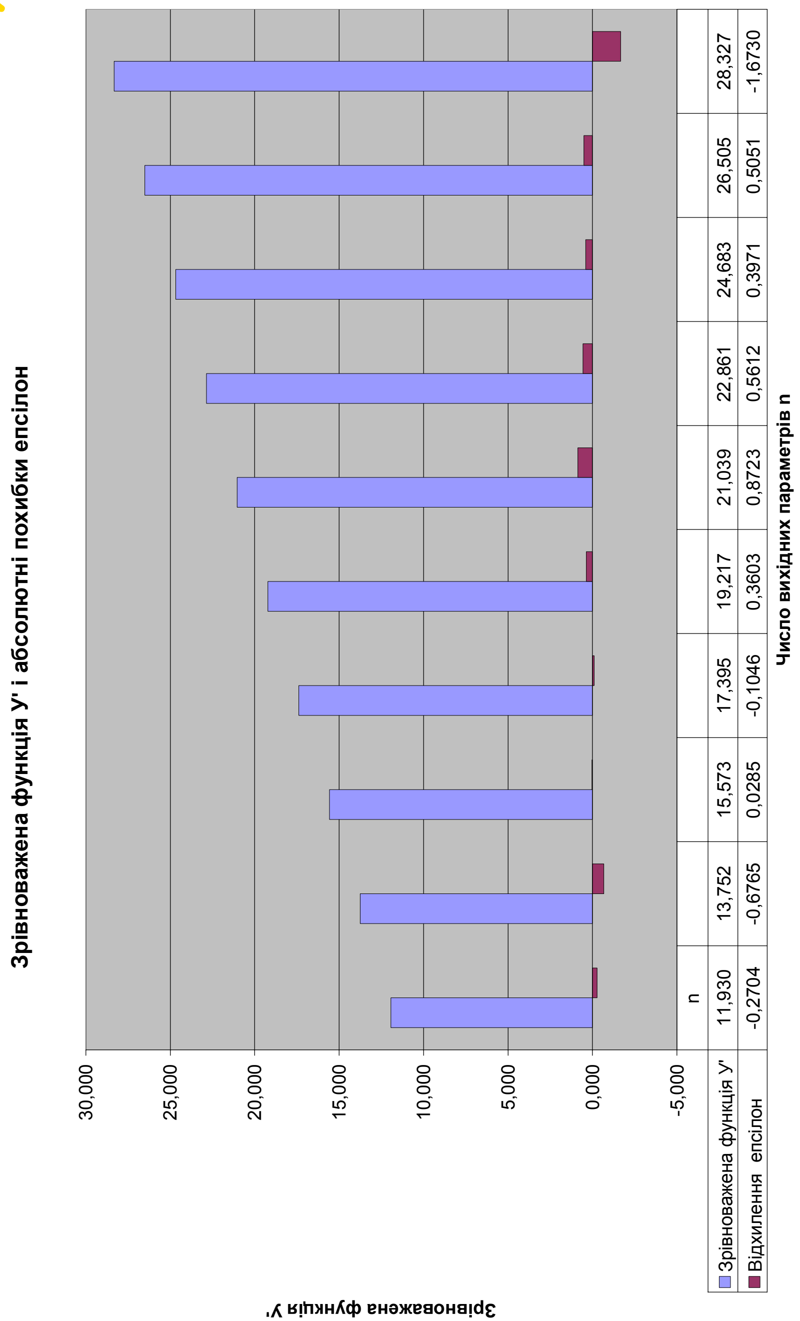


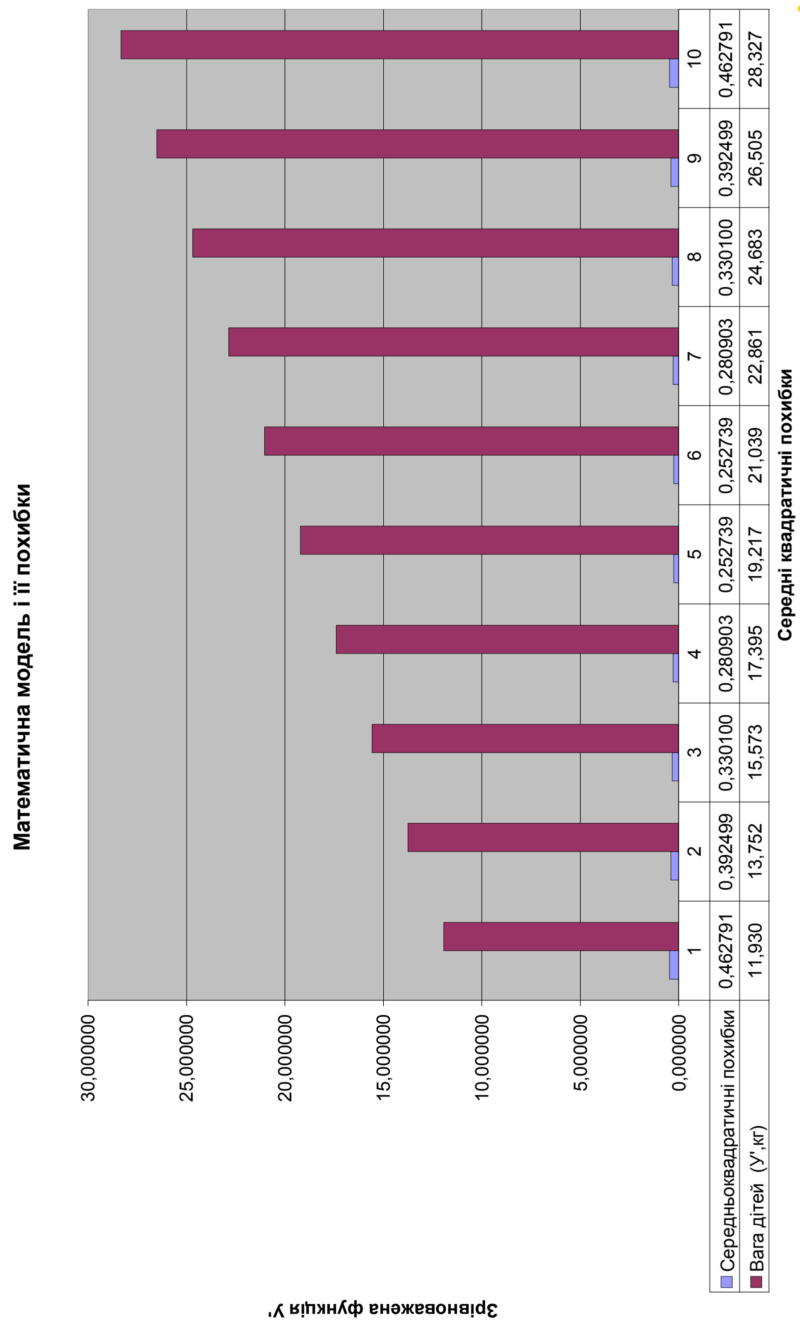
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вага дітей (У,кг)	12,2	14,428	15,545	17,5	18,857	20,167	22,3	24,286	26	30
Ріст дітей (Х,см)	87,5	92,5	97,5	102,5	107,5	112,5	117,5	122,5	127,5	132,5

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

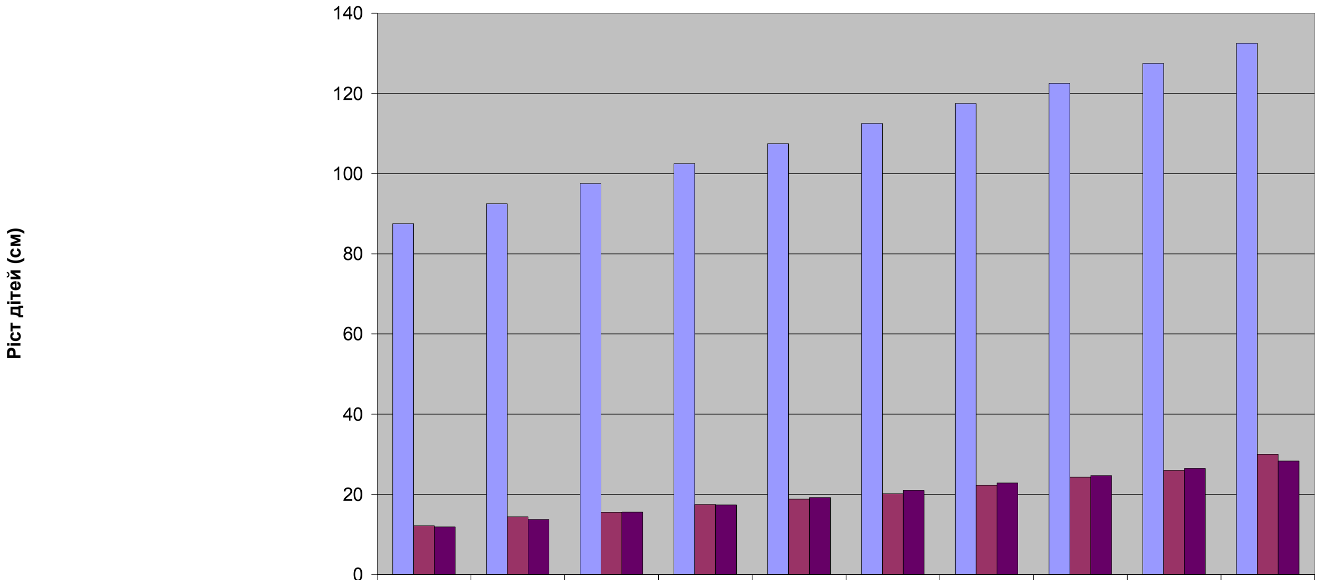


	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вага дітей (У',кг)	11,930	13,752	15,573	17,395	19,217	21,039	22,861	24,683	26,505	28,327


Зрівноважена функція У' і абсолютні похибки епсілон
Зрівноважена функція У'
Число вихідних параметрів n
30,000
25,000
20,000
15,000
10,000
5,000
0,000
-5,000
n
Зрівноважена функція У' 11,930 13,752 15,573 17,395 19,217 21,039 22,861 24,683 26,505 28,327
Відхилення епсілон -0,2704 -0,6765 0,0285 -0,1046 0,3603 0,8723 0,5612 0,3971 0,5051 -1,6730


Математична модель і її похибки
Зрівноважена функція У'
Середні квадратичні похибки
30,000000
25,000000
20,000000
15,000000
10,000000
5,000000
0,000000
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Середньоквадратичні похибки 0,462791 0,392499 0,330100 0,280903 0,252739 0,252739 0,280903 0,330100 0,392499 0,462791
Вага дітей (У',кг) 11,930 13,752 15,573 17,395 19,217 21,039 22,861 24,683 26,505 28,327

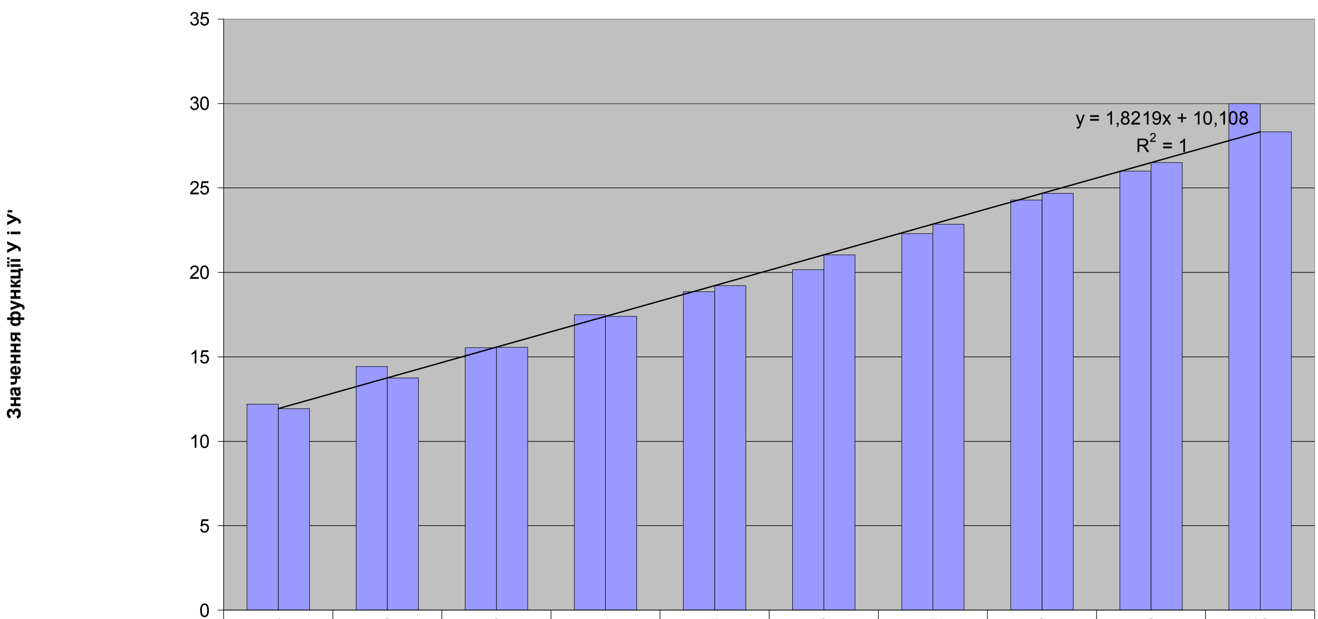
Ріст і вага дітей (експериментальні дані і зрівноважена модель)



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ріст дітей ,см	87,5	92,5	97,5	102,5	107,5	112,5	117,5	122,5	127,5	132,5
Вага дітей,експериментальні дані ,кг	12,2	14,428	15,545	17,5	18,857	20,167	22,3	24,286	26	30
Вага дітей,кг(зрівн.модель)	11,930	13,752	15,573	17,395	19,217	21,039	22,861	24,683	26,505	28,327

Вага дітей.кг(експерим. і зрівнов. моделі)

Істинна (зліва) і побудована (справа) математичні моделі)



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Незрівнов. модель	12,2	14,428	15,545	17,5	18,857	20,167	22,3	24,286	26	30
Зрівнов. модель	11,930	13,752	15,573	17,395	19,217	21,039	22,861	24,683	26,505	28,327

Число вихідних параметрів

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

а першій діаграмі «Ріст і вага дитини(експериментальні дані» першим рядом (лівим стовпчиком) представлена вага дітей ,правим стовпчиком – їх ріст.,

На другій діаграмі приведені значення «У'» вага дітей зрівноваженої моделі..

На третій діаграмі представлена зрівноважена функція У' і абсолютні похибки (відхилення) даної функції від їх експериментальних даних.У..

На четвертій діаграмі представлена побудована автором даної монографії математична модель і середні квадратичні похибки даної моделі.

На п'ятій діаграмі приведено порівняння експериментальної і зрівноваженої математичної моделі «Залежності росту і ваги дітей ».

Шоста діаграма ілюструє порівняння експериментальної і зрівноваженої математичної моделі.

Висновки

На основі проведених досліджень в даній роботі:

1.За результатами експериментальних досліджень 200 значень ваги дітей У і їх росту Х проведена повна статистична обробка матеріалів.

2.Встановлено, що коефіцієнт детермінації , тобто відношення суми квадратів теоретичних відхилень У' від середнього значення $\overline{Y}$ до суми квадратів відхилень спостережуваних значень Уі від середнього значення $\overline{Y}$ складає R^2=0,982.

3.Отриманий коефіцієнт кореляції $\Re$=0,991 вказує на надто високу степінь кореляції (тісноту зв'язку) між ростом і вагою дітей.

4.Математична модель апроксимована по способу найменших квадратів поліномом першого степеня.

5.Отримана формула

Y'=a+bX= -19,954233+ 0,364387 X

залежності росту дітей **У** від їх ваги **Х**.

6.Встановлено, що середня квадратична похибка одиниці ваги за результатами зрівноваження складає μ=0,78739 кг;

;

a. середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a $m_a = 1{,}9233352;$

b. середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b при x $m_b = 0{,}01733773$

c. середні квадратичні похибки зрівноваженої функції m_φ (кг)

0,462791
0,392499
0,330100
0,280903
0,252739
0,252739
0,280903
0,330100
0,392499
0,462791

7.Для визначення адекватності побудованої математичної моделі експериментальним даним отримали F критерій Фішера F=441.714 > Fα,1,7=5.59, що підтверджує з надійністю Р=0,95 повну адекватність побудованої моделі експериментальним даним.

.8.Надійні границі індексу кореляції складають

$$\Delta R = (+/-)2{,}31 * 0{,}003 = (+/-)0{,}007.$$

9.Встановлено, що рівняння парної лінійної регресії, або коефіцієнт регресії «в» значимий на рівні Р=0,95 , тому що

t = 21.0168 > t $_{0.95;8}$ =2.31.

10. Найкращі припущення із заданою надійністю слід очікувати в околі Точки $(\overline{X}, \overline{Y})$. Надійна зона збільшується при віддаленні Х від значення $\overline{X}$.

11.Для прогнозного значення середнє значення коефіцієнта еластичності дорівнює 2,038. Це означає, що при зміні фактора (Х) на 1%, показник (У) зміниться на 2,038 %.

12.Дана робота відкриває дорогу для проведення досліджень методом статистичних випробувань Монте Карло.

13.Вона дає можливість охопити велику аудиторію, тому що будуть генеруватися похибки індивідуально і вони не повторюються в других моделях.

14.Робота виконується вперше. Нам не відомі літературні джерела, де б виконувались аналогічні дослідження в педагогіці і психології.

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Література

1.Смирнов А.В. Применение методов корреляционного анализа в педагогических исследованиях. Современные психолого-педагогические проблемы Высшей школы.Выпуск 1.Издательство Ленинградского унивенрситета, Ленинград, 1973,-с.96- 109.

2.Максименко С.Д., Е.Л. Носенко Експериментальна психологія (дидактичний тезаурус). Навчальний посібник –К.: МАУП, 2004, -128 с.

3.Літнарович Р.М. Дослідження точності апроксимації результатів психолого-педагогічного експерименту методом статистичних випробувань Монте Карло.Ч.1.МЕГУ, Рівне,2006,-45с.

4.Літнарович Р.М. Спосіб найменших квадратів і його використання для

обробки матеріалів психологічних і педагогічних експериментів.Частина 1. Курс лекцій. МЕГУ, Рівне, 2006, - 75 с.

5.Літнарович Р.М. Застосування способу найменших квадратів до обробки матеріалів психологічних і педагогічних експериментів.Частина 2.Курс лекцій. МЕГУ, Рівне, 2007,-110 с.

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

ДОДАТКИ

Додаток 1. Розрахункова таблиця.

12,2	**87,5**	1	7656,25	1067,500	148,840
14,428	**92,5**	1	8556,25	1334,590	208,167
15,545	**97,5**	1	9506,25	1515,638	241,65
17,5	**102,5**	1	10506,25	1793,750	306,25
18,857	**107,5**	1	11556,25	2027,128	355,59
20,167	**112,5**	1	12656,25	2268,788	406,71
22,3	**117,5**	1	13806,25	2620,250	497,3
24,286	**122,5**	1	15006,25	2975,035	589,8
26	**127,5**	1	16256,25	3315,000	676,00
30	**132,5**	1	17556,25	3975,000	900,00
201,283	**1100**	10	123062,50	22892,678	4330,298
H	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
Уексп.	**Хексп..**	**X0**	**X^2**	**Y*X**	**Y^2**

Додаток 2. Розрахунок коефіцієнта кореляції

Розраху	нок коефіці	єнта A=	[XY]-[X][Y]/n=	751,5475
Розраху	нок коефіці	єнта B=	[X^2]-([x]^2)/n=	2062,500000
Розраху	нок коефіці	єнта C=	[Y^2]-([Y]^2)/n=	278,813734
Розраху	нок коефіці	єнта коре	ляції r^2=A^2/BC=	0,982210899
	r=√r^2=	0,991065537		

Додаток 3. Вільні члени нормальних рівнянь.

[YX]=22892,7

[Y]=201,283

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Додаток 4. Розрахунок коефіцієнтів апроксимуючого поліному.

Розраху	нок коефіці	єнта b	
	b=A/B=	0,364387	
Розраху	нок коефіці	єнта a	
	a=1/n([Y]-b[X])=		-19,954233

Нами виведена формула за результатами теоретичних досліджень.

Формула	побудованої моделі	математи	чної
Y'=a+bX=	-19,954233 +	0,364387	X

Додаток 5. Оцінка точності функції φ $_{Y'}$

$$m_{\varphi} = \sqrt{m_b^2 \left[X_{cn.} - \frac{1}{n}\left[X\right]\right]^2 + \mu^2/n}$$

mφ=

0,462791
0,392499
0,330100
0,280903
0,252739
0,252739
0,280903
0,33010
0,392499
0,462791

Додаток 6. Контроль зрівноваження.

Контроль	зрівноважен	ня	
[Y^2]-	b[YX]-	a[Y]=	4,9598457
[εε]=	4,9598457		
Контроль	зрівноважен	ня	

Додаток 7. Оцінка точності зрівноважених елементів.

Середня	квадратична похибка одиниці ваги			
μ=√(	**[εε]/(n-k))=**	0,78739		
Середня	квадратична похибка коефіцієнта a			нта b
mb=	μ√(1/B)=	0,01733773		
Се редня квадратична похибка коефіцієнта в			коефіціє	нта a
ma=	μ√([x^2]/B*n)	1,9233352		

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Вага	коефіцієнта	b	
Pb=	B=		2062,5
Вага	коефіцієнта	a	
Pa=	B*n/[X^2]		0,16759777

Додаток 8.Матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь

Матриця нормальних	коеф. рівнянь
123062,500	1100,000
1100,000	10

Додаток 9. Обернена матриця

Обернена	матриця
0,00048485	-0,05333333
-0,05333333	5,96666667

Вільні чл.
22892,7
201,283

Додаток 10. Вектор невідомих

	Вектор невідомих
b=	0,36438667
a=	-19,954233

Додаток 11. Контроль обчислень в матричній формі

0,462791	-0,0109091	**1,3**	0,34545455	0,588	0,462791
0,392499	-0,0084848	**1,03333**	0,24848485	0,498	0,392499
0,330100	-0,0060606	**0,76667**	0,17575758	0,419	0,330100
0,280903	-0,0036364	**0,5**	0,12727273	0,357	0,280903
0,252739	-0,0012121	**0,23333**	0,1030303	0,321	0,252739
0,252739	0,00121212	**-0,03333**	0,1030303	0,321	0,252739
0,280903	0,00363636	**-0,3**	0,12727273	0,357	0,280903
0,330100	0,00606061	**-0,56667**	0,17575758	0,419	0,33010

0,392499	0,00848485	**-0,83333**	0,24848485	0,498	0,392499
0,462791	0,01090909	**-1,1**	0,34545455	0,588	0,462791
R	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**
mφ	**Q'=φ(X)*Q**		**1/Pφ**	**√(1/Pφ)**	**контр.mφ**

Літнарович Руслан Миколайович
доцент, кандидат технічних наук

Побудова і дослідження математичної моделі залежності між ростом і вагою дітей методом статистичних випробувань Монте Карло Істинна модель

Комп'ютерний набір, Верстка і макетування та дизайн в редакторі Microsoft®Office® Word 2003 Р.М.Літнарович

Міжнародний Економіко-Гуманітарний Університет ім.акад. Степана Дем'янчука

Кафедра математичного моделювання

33027,м.Рівне,вул..акад.С.Дем'янчука,4.